第三章 随机过程的抽样方法

随机过程的基本概念

- 有限 vs 无限随机变量的集合，非参数 Bayesian 模型的计算需对随机过程进行抽样，本章将介绍一些常见随机过程的抽样，如随机游走，高斯过程，泊松过程，Dirichlet process

- 一个随机过程一般记为 $\{X(t) \mid t \in \mathcal{T}\}$
  - 指标集 (index set) $\mathcal{T}$ 是离散或连续的集合，如 $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots\}$ 或 $\mathcal{T} = [0, \infty)$
  - 如果 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^d$ $(d > 1)$ 上的一个子集，称定义在 $\mathcal{T}$ 上的随机过程为 **random field**

- 随机过程 $\{X(t) \mid t \in \mathcal{T}\}$ 的一次实现定义了一个从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(\cdot)$，称函数 $f(\cdot)$ 为该随机过程的一条样本路径

随机过程的基本概念

- $\forall t_1, \ldots, t_m \in \mathcal{T}$, 称 $(X(t_1), \ldots, X(t_m))$ 的联合分布为随机过程 $X(t)$ 的一个有限维分布
  - 有限维分布不能唯一确定一个随机过程，比如, $X(t)$ 是定义在指标集 $\mathcal{T} = [0, 1]$ 上的随机过程, 随机抽 $s \sim \boldsymbol{U}[0, 1]$, 定义另一个随机过程 $Y(t)$ 如下:

$$Y(t) = \begin{cases} X(s) + 1, & t = s \\ X(t), & t \neq s \end{cases}$$

- 如果需要计算的值涉及随机过程 $X(t)$ 在无限个点 t 处的值，比如计算 $\mu = E[g(X(\cdot))]$, 可使用 Monte Carlo 方法做近似估计：先从随机过程生成 n 条样本路径 $X_i(t_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$. 假设第 i 条路径有 M_i 个点，则 μ 可估计为

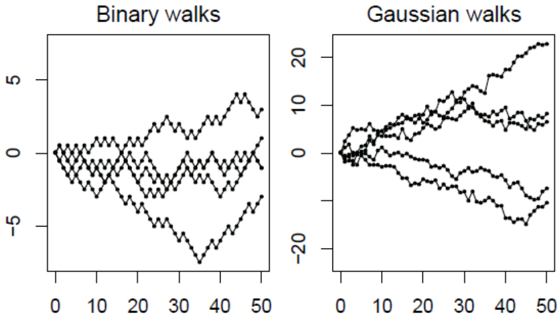
$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g\left(X_i(t_{i1}), \ldots, X_i(t_{iM_i})\right)$$

随机游走

随机游走一般具有以下形式：

$$X_t = X_{t-1} + Z_t, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

其中 Z_t 是 iid 的随机变量 (向量), 初始点 X_0 通常取为 $\mathbf{0}$

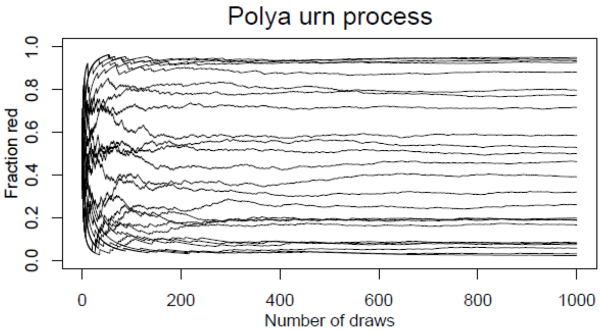


随机游走

- **Pólya's urn process**. 令 R_t 代表 t 时刻的红球数，B_t 代表黑球数，$X_t = (R_t, B_t)$. 初始时刻 $X_0 = (1,1)$，增量 Z_t 服从如下分布：

$$Z_t = \begin{cases} (1,0), & \text{概率} = R_t/(R_t+B_t) \\ (0,1), & \text{概率} = B_t/(R_t+B_t) \end{cases}$$

  $t \to \infty$ 时，桶中红球所占的比例 $Y_t = R_t/(R_t+B_t)$ 是多少？
  - 数学家 Pólya 证明 Y_t 的每条样本路径都会收敛到一个值 $Y_\infty \sim \boldsymbol{U}(0,1)$



高斯过程

- 任意有限维分布是一个多元正态分布
- 期望函数: $\mu(t) = E[X(t)]\,,\ t \in \mathcal{T}$
- 协方差函数: $\Sigma(t,s) = \mathrm{Cov}\left(X(t), X(s)\right)\,,\ \forall t, s \in \mathcal{T}$
  - 对称性: $\Sigma(t,s) = \Sigma(s,t)$
  - (半) 正定性: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i x_j \Sigma(t_i, t_j) \geq 0,\ \forall m \geq 1, t_i \in \mathcal{T}, x_i \in \mathbb{R}$

- 为函数插值提供不确定性估计, 非参数 Bayesian 模型常用的先验分布
  - 假设 $f(\cdot)$ 是高斯过程的一条样本路径, 对 $f(\cdot)$ 的任意有限维分布就有先验信息
  - 观察到 k 个点的值 $f(t_1), \ldots, f(t_k)$ 后, 计算样本路径上任一点 $f(t)$ 的条件期望和方差: $E[f(t) \mid f(t_1), \ldots, f(t_k)]$, $Var[f(t) \mid f(t_1), \ldots, f(t_k)]$
  - 在每一点对 $f(t)$ 抽样可以生成一条通过已知点的样本路径

平稳的高斯过程

- 平稳的随机过程：对任意间隔 Δ, $\forall t \in \mathcal{T}$, $X(t)$ 和 $X(t+\Delta)$ 都是同分布
- 高斯过程的平稳性等价于

$$\begin{aligned} \mu(t+\Delta) &= \mu(t) \equiv \mu(0) \\ \Sigma(t+\Delta, s+\Delta) &= \Sigma(t,s) = \Sigma(t-s, 0) \end{aligned} \qquad \forall\Delta, \forall t, s \in \mathcal{T}$$

一些常见的平稳高斯过程的协方差函数：

- Exponential covariance

$$\Sigma(t,s) = \sigma^2 \exp\left(-\theta|t-s|\right), \quad \theta > 0$$

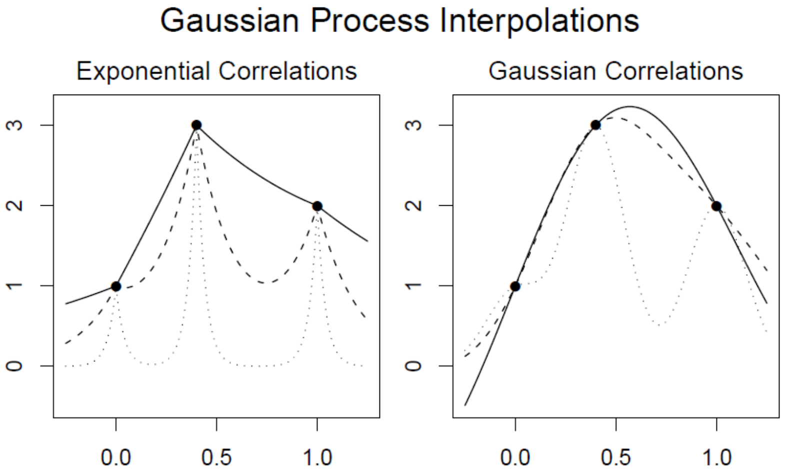
该过程的样本路径连续但不可导

- Gaussian covariance

$$\Sigma(t,s) = \sigma^2 \exp\left(-\theta(t-s)^2\right), \quad \theta > 0$$

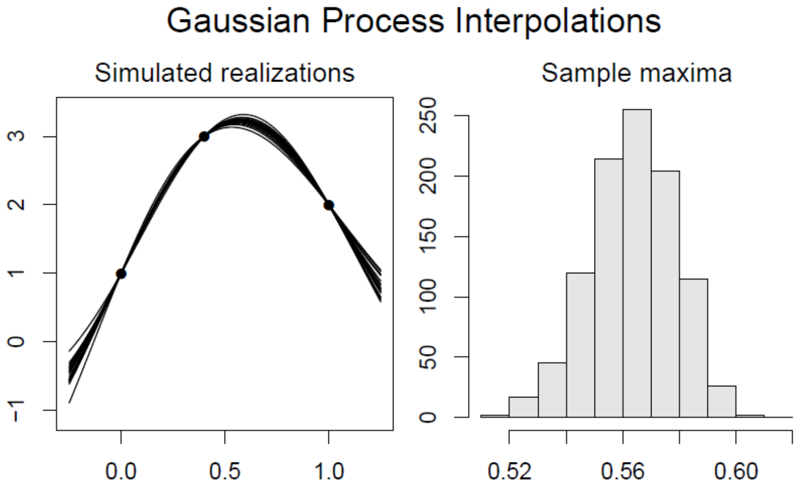
也被称为 squared exponential covariance, 它的样本路径任意阶可导

平稳的高斯过程



图中的实线，虚线，点线分别对应 $\theta = 1, 5, 25$

平稳的高斯过程



Gaussian covariance, $\theta = 1$, $\sigma^2 = 1$

平稳的高斯过程

- Matérn covariances $\Sigma(t,s;\nu)$ 由一个平滑度系数 ν 控制, 通过 Bessel function 定义，当 $\nu = m + 1/2$ 且 $m \in \mathbb{N}$, $\Sigma(t,s;\nu)$ 有解析形式，前 4 个特例为:

$$\Sigma\left(t,s;\frac{1}{2}\right) = \sigma^2 \exp\left(-\theta|t-s|\right)$$

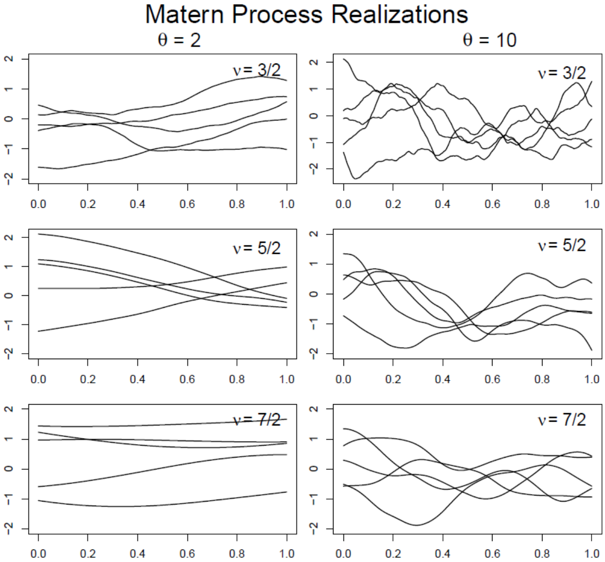
$$\Sigma\left(t,s;\frac{3}{2}\right) = \sigma^2 \left(1+\theta|t-s|\right) \exp\left(-\theta|t-s|\right)$$

$$\Sigma\left(t,s;\frac{5}{2}\right) = \sigma^2 \left(1+\theta|t-s| + \frac{1}{3}\theta^2|t-s|^2\right) \exp\left(-\theta|t-s|\right)$$

$$\Sigma\left(t,s;\frac{7}{2}\right) = \sigma^2 \left(1+\theta|t-s| + \frac{2}{5}\theta^2|t-s|^2 + \frac{1}{15}\theta^3|t-s|^3\right) \exp\left(-\theta|t-s|\right)$$

  - $\nu = m + 1/2$ 时，Matérn covariance 生成的样本路径有 m 阶导数
  - $\nu \to \infty$ 时, Matérn covariance 收敛到 Gaussian covariance
  - Matérn covariance 可以提供介于 exponential covariance 和 Gaussian covariance 之间的平滑度

平稳的高斯过程



布朗运动

- 标准布朗运动 (维纳过程) $B(t)$ 是定义在 $\mathcal{T}=[0,\infty)$ 上的高斯过程，它有三条性质:
  1. $B(0)=0$.
  2. 对于任意的 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$, $B(t_i)-B(t_{i-1})\overset{ind}{\sim}N(0,t_i-t_{i-1})$, $i=1,\ldots,m$.
  3. $B(t)$ 的样本路径在 $[0,\infty)$ 上以概率 1 连续
  - $B(t)$ 的期望函数 $\mu(t)=0$, 协方差函数 $\Sigma(t,s)=\min(t,s)$, 不平稳
  - $B(t)$ 的样本路径连续，但以概率 1 处处不可导
- 将标准布朗运动记为 $B(\cdot)\sim \mathrm{BM}(0,1)$, 定义一个新的随机过程

$$X(t)=\delta t+\sigma B(t)$$

称 $X(t)$ 是漂移 δ, 方差 σ^2 的布朗运动, 记为 $X(\cdot)\sim \mathrm{BM}(\delta,\sigma^2)$

  - $X(t)$ 的期望函数 $\mu(t)=\delta t$, 协方差函数 $\Sigma(t,s)=\sigma^2\min(t,s)$
  - 对 $X(\cdot)\sim \mathrm{BM}(\delta,\sigma^2)$ 在 $[0,T]$ 上抽样，只需先抽 $B(\cdot)\sim \mathrm{BM}(0,1)$ 在 $[0,1]$ 上的样本路径，然后令 $X(t)=\delta t+\sigma\sqrt{T}B(t/T)$

布朗运动

- 如何对标准布朗运动在 [0,1] 上抽样？
  - 对于 [0,1] 上的任意一列点，$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq 1$，根据定义可得 $B(\cdot)$ 在这些点的样本：

$$
\begin{aligned}
B(t_1) &= \sqrt{t_1} Z_1, \\
B(t_j) &= B(t_{j-1}) + \sqrt{t_j - t_{j-1}} Z_j, \quad j = 2, \ldots, m
\end{aligned}
$$

    其中 $Z_j \overset{ind}{\sim} N(0,1)$, $j = 1, \ldots, m$
  - 写为矩阵形式:

$$
\begin{pmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) \\ \vdots \\ B(t_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \cdots & \sqrt{t_m - t_{m-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix}
$$

布朗桥

- 称布朗运动 $B(t)$ 在 $[l, r]$ 上给定两端值 $B(l)$ 和 $B(r)$ 的条件分布为一个布朗桥
- 标准布朗桥 是 $[0,1]$ 上给定 $B(0) = B(1) = 0$ 的标准布朗运动，记为 BB(0,1)
- 对布朗桥抽样可以通过布朗运动的路径得到：如果 $B(\cdot) \sim$ BM(0,1)，令
$$\tilde{B}(t) = B(t) - tB(1), \quad t \in [0,1]$$
则 $\tilde{B}(\cdot) \sim$ BB(0,1)
- 生成任意两点之间的一条布朗运动的路径：给定路径的起点 $B(l)$ 和终点 $B(r)$，可如下产生 BM(δ, σ^2) 在 $[l, r]$ 上的一条路径
$$B(t) = B(l) + \frac{t-l}{r-l}(B(r) - B(l)) + \sigma\sqrt{r-l}\tilde{B}\left(\frac{t-l}{r-l}\right), \; l \le t \le r$$
其中 $\tilde{B}(\cdot) \sim$ BB(0,1)

几何布朗运动

- 布朗运动最初描述粒子受周围粒子的碰撞在空间中做随机运动，多次微小碰撞的累加效应会趋于一个正态分布
- 股价受各种市场信息的影响不断波动，股价变化常被描述为一种相乘效应或对数尺度上的累加效应，极限分布是对数正态分布，对应的随机过程被称为几何布朗运动
- 股价 S_t 在一个小区间 Δ 上的相对变化 (收益率)：

$$\frac{S_{t+\Delta} - S_t}{S_t} = \frac{\Delta S_t}{S_t} \approx \frac{dS_t}{S_t}$$

- 经典的金融模型 (Hull, 2003) 这样描述 S_t 的相对变化：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \delta dt + \sigma dB_t$$

其中 $B \sim \mathrm{BM}(0,1)$

  - 该模型假设 S_t 在一个小区间 Δ 上的相对变化

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} \sim N(\delta\Delta, \sigma^2\Delta)$$

几何布朗运动

- 称满足
$$dS_t = \delta S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{2}$$
的随机过程 S_t 是一个几何布朗运动，记为 $S \sim \mathrm{GBM}(S_0, \delta, \sigma^2)$
- 方程(2)是少数几个有解析解的随机微分方程，解的形式为
$$S_t = S_0 \exp\left\{(\delta - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\right\} \tag{3}$$

定理 (Itô's formula)

如果 $dS_t = a(S_t)dt + b(S_t)dB_t$ 且 $f(\cdot)$ 是一个二阶连续可导的函数，则
$$df(S_t) = \left(f'(S_t)a(S_t) + \frac{1}{2}f''(S_t)b^2(S_t)\right)dt + f'(S_t)b(S_t)dB_t.$$

几何布朗运动

- **亚式看涨期权的定价**. 航空公司最怕遇到油价大幅上涨，用 S_t 表示 t 时刻的油价，假设当前时刻的油价 $S_0 = 1$. 如果价格 $S_t > 1.1$，航空公司就会面临亏损. 有一种亚式看涨期权可以帮助航空公司对冲油价上涨的风险，如果航空公司购买了该期权，一年之后会收到以下金额

$$f(S(\cdot)) = \max\left(0,\ \frac{1}{12}\left(\sum_{j=1}^{12} S_{j/12}\right) - K\right)$$

  该看涨期权可以保证航空公司的油价成本不超过 K.

  - 这样一份期权的售价是多少？理论上该期权在当前时刻的合理价格为 $e^{-rT}E(f(S))$, 其中 T 是距离到期日的时间，r 是无风险利率. 假设油价的波动 S_t 是一个几何布朗运动, 根据(3)可以生成大量 S_t 的样本路径, 每条路径都可以计算一个 f 的值，f 的样本均值会收敛到 $E(f(S))$

泊松点过程

- 点过程是指某个集合 $S \subset \mathbb{R}^d$ 内的一列随机点 $\{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots\}$
  - $S = [0, \infty)$: 随机来电的时间、网站访问高峰的时间、台风登陆的时间等
  - $S \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$: 地震的位置、森林中树的位置、星云中星系的位置等
- 将点过程中点的个数记为 $N(S)$, 对于集合 $A \subset S$, 用 $N(A)$ 表示落在 A 中的点的个数
- 点过程的有限维分布是 S 上任意 J 个不相交的子集中点的个数的联合分布, 即 $(N(A_1), \ldots, N(A_J))$ 的分布, 其中 $A_1, \ldots, A_J \subset S$ 且互不相交

定义 (均匀泊松过程)

如果对 S 上任意 J 个不相交的子集 $A_j \subset S$ 且 $\mathrm{vol}(A_j) < \infty$, $j = 1 \ldots, J$, 点列 $\{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots\}$ 满足

$$N(A_j) \overset{ind}{\sim} \mathrm{Po}\left(\lambda \cdot \mathrm{vol}(A_j)\right), \ j = 1 \ldots, J,$$

称该点列为 S 上一个强度为 λ $(\lambda > 0)$ 的均匀泊松过程, 记为 $\{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots\} \sim \mathrm{PP}(S, \lambda)$.

泊松点过程

定义 (非均匀泊松过程)

如果对 S 上任意 J 个不相交的子集 $A_j \subset S$ 且 $\text{vol}(A_j) < \infty$, $j = 1 \ldots, J$, 点列 $\{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots\}$ 满足

$$N(A_j) \overset{ind}{\sim} \text{Po}\left(\int_{A_j} \lambda(\boldsymbol{s}) d\boldsymbol{s}\right), \ j = 1 \ldots, J,$$

其中强度函数 $\lambda(\boldsymbol{s}) \geq 0$, 称该点列为 S 上的一个非均匀泊松过程, 记为 $\{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots\} \sim \text{NHPP}(S, \lambda)$.

定理

$\lambda(\boldsymbol{s}) \geq 0$ 是 S 上的一个强度函数且 $\Lambda(S) = \int_S \lambda(\boldsymbol{s}) d\boldsymbol{s} < \infty$. 如果 S 上的点列 $\{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots\}$ 满足 $N(S) \sim Po(\Lambda(S))$, 且给定 $N(S) = n$,

$$P(\boldsymbol{P}_i \in A) = \frac{1}{\Lambda(S)} \int_A \lambda(\boldsymbol{s}) d\boldsymbol{s}, \quad \forall A \subset S, \ i = 1, \ldots, n,$$

则点列 $\{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots\} \sim NHPP(S, \lambda)$.

泊松点过程

- 如果能从 PDF 为 $\rho(\boldsymbol{s}) \propto \lambda(\boldsymbol{s})$ 的分布抽样，就可以对强度为 $\lambda(\boldsymbol{s})$ 的 NHPP 抽样

推论

对于 S 上一个强度为 λ 的均匀泊松过程，如果 $vol(S) < \infty$，可以如下对其抽样：首先抽

$$N(S) \sim Po\left(\lambda \cdot vol(S)\right),$$

然后在 S 上独立均匀地抽 $N(S)$ 个点 $\boldsymbol{P}_i \sim \boldsymbol{U}(S)$, $i = 1, \ldots, N(S)$.

- 练习. 如何在圆盘 $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leq 1\}$ 上抽一列点 $\{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots\} \sim PP(D, \lambda)$?

$[0,\infty)$ 上的泊松过程

- 假设 $\mathcal{T}=[0,\infty)$ 上的点列按顺序产生，$T_1 < T_2 < \cdots$，定义计数函数

$$N(t) \equiv N([0,t]) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}\left(T_i \le t\right), \quad 0 \le t < \infty$$

- $\mathcal{T}=[0,\infty)$ 上的均匀泊松过程 $\mathrm{PP}(\lambda)$ 具有以下三条性质：
  1. $N(0)=0$
  2. $N(t)-N(s) \sim \mathrm{Po}\left(\lambda(t-s)\right)$, $0 \le s < t$
  3. 增量独立：对任意的 $0=t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, $N(t_i)-N(t_{i-1})$, $i=1,\ldots,m$ 是独立的

- 点列 $\{T_1, T_2, \ldots\} \sim \mathrm{PP}(\lambda)$ 的另一重要特性：

$$T_i - T_{i-1} \overset{iid}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda), \ i \ge 1, \ T_0 = 0.$$

  - $T_0=0$, $T_i = T_{i-1} + E_i/\lambda$, $i \ge 1$, 其中 $E_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{Exp}(1)$

$[0, \infty)$ 上的泊松过程

- 如果只需要在一个有界区间 $[0, T]$ 上对 PP(λ) 抽样，一个更简单的抽样方法：
$$N = N(T) \sim \text{Po}(\lambda T)$$
$$S_i \sim \boldsymbol{U}[0, T], \ i = 1, \ldots N$$
$$T_i = S_{(i)}, \ i = 1, \ldots, N$$

- $\mathcal{T} = [0, \infty)$ 上的非均匀泊松过程 NHPP(λ) 具有以下三条性质：
  1. $N(0) = 0$
  2. $N(t) - N(s) \sim \text{Po}\left(\int_s^t \lambda(x) dx\right), \ 0 \le s < t$
  3. $N(t)$ 的增量独立

- 为方便对 NHPP(λ) 抽样，定义 cumulative rate function:
$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

$[0,\infty)$ 上的泊松过程

- 点列 $\{T_1, T_2, \ldots\} \sim \text{NHPP}(\lambda)$, 定义随机变量 $Y_i = \Lambda(T_i)$, 证明

$$Y_i \sim \text{PP}(1)$$

- 因此可以如下从 $\text{NHPP}(\lambda)$ 中抽取点列 $T_1, T_2, \ldots$

$$\begin{aligned} Y_i &= Y_{i-1} + E_i, \ \ i = 1, 2, \ldots \\ T_i &= \Lambda^{-1}(Y_i) \end{aligned} \tag{4}$$

  其中 $E_i \overset{iid}{\sim} \text{Exp}(1)$, $Y_0 = 0$

  - 如果 $\lim\limits_{t\to\infty} \Lambda(t) = \infty$, 算法(4)可以一直运行下去
  - 如果 $\lim\limits_{t\to\infty} \Lambda(t) = M < \infty$, 当 $Y_j > M$ 时, $\Lambda^{-1}(Y_j)$ 不存在, 算法停止

Dirichlet process

- DP 描述的是分布的分布，每一条样本路径都是一个分布, 有限维分布是一个 Dirichlet 分布
- DP 在非参数 Bayesian 模型中常作为一个未知分布的 prior, DP prior 具有共轭性, 利用 DP 可构造无限维混合分布模型, 即 DP mixture model
- 定义在 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上的 DP 是通过一个常数 $\alpha > 0$ 和 Ω 上的一个确定的分布 G (CDF) 定义的，它的任意有限维分布对应 Ω 的一个有限分割:

  $$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m, \ A_i \cap A_j = \emptyset, \ i \neq j$$

  且满足

  $$(F(A_1), \ldots, F(A_m)) \sim \mathrm{Dir}\left(\alpha G(A_1), \ldots, \alpha G(A_m)\right)$$

- 如果随机分布 $F \sim \mathrm{DP}(\alpha, G)$ (或 $\mathrm{DP}(\alpha G)$), F 的期望是 G, α 决定了 F 到 G 的平均距离

DP prior

使用 DP prior 的非参数 Bayesian 模型：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n &\overset{iid}{\sim} F \\
F &\sim DP(\alpha, G)
\end{aligned}
$$

推断观察到数据 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 后 F 的后验分布

- 以 $n = 1$ 为例，可得 F 的后验分布也是一个 DP

$$
F \mid \boldsymbol{x}_1 \sim \mathrm{DP}\left(\alpha G + \delta_{\boldsymbol{x}_1}\right)
$$

  其中 $\delta_{\boldsymbol{x}_1}$ 是一个退化分布的 CDF，该分布的所有概率集中在点 $\boldsymbol{x}_1$

- 依此类推，当有 n 个观察值 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 时，F 的后验分布为

$$
F \mid \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \sim \mathrm{DP}\left(\alpha G + \sum_{i=1}^{n} \delta_{\boldsymbol{x}_i}\right)
$$

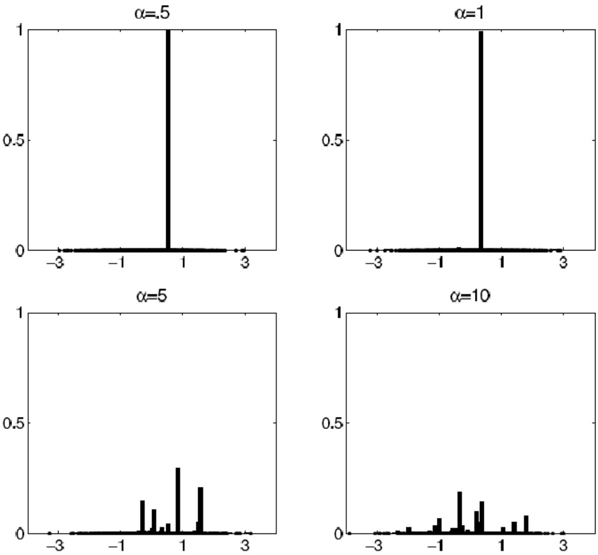
Stick-breaking process

- DP 的定义没有给出该如何对 $F \sim \mathrm{DP}(\alpha, G)$ 抽样，DP 的stick-breaking representation给出了一种直接建立 DP 样本的方法:

$$F = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \delta_{\boldsymbol{X}_j}, \ \pi_j = \theta_j \prod_{i<j} (1-\theta_i), \ \theta_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{Beta}(1, \alpha), \ \boldsymbol{X}_j \overset{iid}{\sim} G.$$

  - 如果 $F \sim \mathrm{DP}(\alpha, G)$，$F$ 一定是一个离散分布
  - 给每个点 $\boldsymbol{X}_j$ 分配的概率 π_j 从一个stick-breaking process中产生以保证 $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$
  - 由于 $\theta_j \sim \mathrm{Beta}(1, \alpha)$，$E(\theta_j) = \dfrac{1}{1+\alpha}$，如果 α 很小，上述过程倾向于给排在前面的点分配较大的概率，后面的点分到很小的概率

Stick-breaking process



Chinese restaurant process

- CRP 是另一种对 DP 抽样的方法，用大样本集近似真实分布
- 考虑从以下两阶段模型抽样 (F 未知):

$$\begin{aligned} F &\sim \mathrm{DP}(\alpha, G) \\ \boldsymbol{X}_i &\overset{iid}{\sim} F, \ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

  - $n = 1$ 时，$\boldsymbol{X}_1$ 的边际分布是什么？
  - $n \geq 2$ 时，依次从 $\boldsymbol{X}_i$ 给定 $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{i-1}$ 的条件分布抽样

$$F \mid \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{i-1} \sim \mathrm{DP}\left(\alpha + i - 1, \frac{\alpha G + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_{\boldsymbol{X}_j}}{\alpha + i - 1}\right)$$

此时 $\boldsymbol{X}_i \sim F$ 的边际分布为

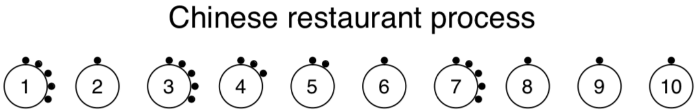
$$\boldsymbol{X}_i \mid \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{i-1} \sim (\alpha G + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_{\boldsymbol{X}_j})/(\alpha + i - 1) \tag{6}$$

Chinese restaurant process

- (6)中的分布是一个混合分布，可如下进行抽样：

$$\boldsymbol{X}_i = \begin{cases} \boldsymbol{Y} \sim G & 概率\ \alpha/(\alpha+i-1) \\ \boldsymbol{X}_1 & 概率\ 1/(\alpha+i-1) \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{X}_{i-1} & 概率\ 1/(\alpha+i-1). \end{cases} \tag{7}$$

由(7)生成的随机过程被称为Chinese restaurant process (CRP)



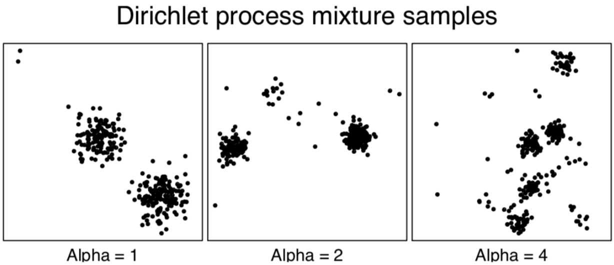
- 在 CRP 中，第 n 个顾客到达时期望开设的桌数是 $O(\log n)$
- 从 CRP 产生的一条样本路径 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ (n 很大) 的经验分布可近似看作 DP(α, G) 中随机生成的一个分布

DP mixture model

- 在 CRP 模型(5)中再加一层就得到了DP mixture model:

$$\begin{aligned} F &\sim \mathrm{DP}(\alpha, G) \\ \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n &\sim F \\ \boldsymbol{Y}_i &\overset{ind}{\sim} H(\cdot \mid \boldsymbol{X}_i), \ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{8}$$

  其中 $\{\boldsymbol{Y}_i\}_{i=1}^n$ 是观察值，$\{\boldsymbol{X}_i\}_{i=1}^n$ 和 F 是待估计的参数
- 考察从模型(8)生成的数据 $\{\boldsymbol{Y}_i\}_{i=1}^n$ 的特点
  - G 为 $N_2(\mathbf{0}, 3^2 I)$，$\boldsymbol{Y}_i \overset{ind}{\sim} N_2(\boldsymbol{X}_i, 0.4^2 I)$



DP mixture model

- CRP 模型产生重复值的特点使它很适合描述有聚类特征的数据
- α 越小，样本 $\{\boldsymbol{y}_i\}$ 的聚集效应越明显
- DP mixture model (8) 的优点是不需要提前设定聚类的个数，一般使用 MCMC 方法估计聚类的个数 ($\{\boldsymbol{X}_i\}$ 取到不同值的个数)
- DP mixture model 允许聚类的个数是无限的，具有很大灵活度，可以随着新观察值的加入不断引入新的聚类